Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos No. 2. Enero-Junio 2020.
ISSN en trámite. http://joom.org.mx

Una alternativa para el trazo de los diez primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia a través de fórmulas deductivas.

Jaime William Flores Tecalco[#@]

[#]Alumno de la Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

[@]Alumno de la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)-Azc, Av. San Pablo Xalpa 180 Colonia Reynosa.

william10_511@hotmail.com

***Resumen*- El presente artículo describe Una alternativa para el trazo de los diez primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia a través de fórmulas deductivas.**

***Palabras Clave*- geometría, formulación, método deductivo, polígonos, algoritmos.**

Abstract- This article describes an alternative for the tracing of the first ten regular polygons inscribed on a circle through deductive formula.

Keywords-geometry, formulation, deductive method, polygons, algorithms.

***Mathematical Subject Classification:* 97D40**

I. INTRODUCCIÓN

Se le puede llamar "polígono regular" a la figura geométrica que es equilátera y equiángula al mismo tiempo [1]. Podemos apoyarnos en una circunferencia, circunferencia circunscrita, para el trazado de dichos polígonos. Todo polígono regular tiene una circunferencia inscrita y una circunscrita [3].

La construcción del polígono regular consiste en la división de la circunferencia en un número de partes iguales dependiendo el polígono a tratar e unirlas al finalizar.

Para conseguir estas partes iguales, por lo regular se lleva a cabo una metodología de relaciones y trazos diferentes en cada figura geométrica ocupando compás, regla y escuadra. Por ende, cada polígono regular posee un algoritmo particular de trazado.

Desde la educación básica en nuestro país, los planes de estudio contemplan el estudio de polígonos regulares, su trazado, el cálculo de su perímetro y área; así que el propósito de este escrito es dar una alternativa a la metodología que usualmente se usa, con esto no se quiere dar a entender que el uso de fórmulas deductivas sea bueno o malo, simplemente son una opción adicional. También cabe mencionar que estas fórmulas no son nuevas sino son una derivación de relaciones geométricas de cada polígono regular.

II. PARTES DE UN POLÍGONO REGULAR

Para comenzar vamos a recapitular el conocimiento obtenido en nuestra formación escolar denotando las partes, solo las de nuestro interés en este texto, de un polígono regular. Se tomará la figura 1 como el del hexágono regular para generalizar los conceptos.

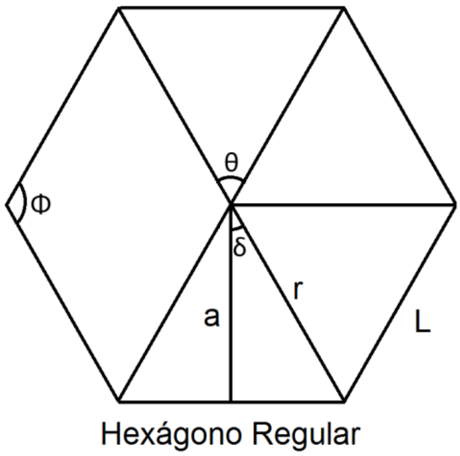

Fig. 10 Hexágono regular.

Primero denotaremos como **L** al lado del polígono regular y como **r** al radio, el cual es el segmento que une el centro del polígono con un de sus vértices. El centro de una circunferencia circunscrita es el mismo que la del polígono regular inscrito en ella [6]. Denominaremos como **a** la apotema, que es el segmento perpendicular del centro del polígono a uno de sus lados [1]. Si el número de lados de un polígono regular inscrito se aumenta indefinidamente, la apotema tiende hacia el radio como límite [3].

Un ángulo central tiene el mismo número de grados que el arco que lo intercepta, es decir, se mide por su arco interceptado [5]. El ángulo central se denotará por θ (Theta), entonces:

$$\theta = \frac{360°}{n} = \frac{2\pi}{n} \qquad (1)$$

Donde n será el número de lados del polígono regular a tratar.

Le llamaremos ángulo δ (Delta) a uno de los ángulos del triángulo rectángulo formado por **a** y **r**, por lo cual:

$$\delta = \frac{\theta}{2} = \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n} = \frac{\pi}{n}$$

$$\delta = \frac{\pi}{n} \qquad (2)$$

Al ángulo interno se le llamará Φ (Phi), se ocupará la siguiente expresión para representarlo:

$$\phi = \frac{(n-2)}{n}180° \qquad (3)$$

La expresión (3) proviene de la generalidad de la suma de ángulos internos:

Si se sabe que la suma de los ángulos internos (α) de un triángulo es 180° [6], entonces se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 180° \qquad (4)$$

Para saber la suma de los ángulos internos (β) de un cuadrado se puede dividir el cuadrado en dos triángulos y la suma la expresamos como:

$$\sum_{i=1}^{4} \beta_i = 2\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 2(180°) = 360° \qquad (5)$$

Así mismo se puede saber la suma de los ángulos internos (γ) de un pentágono al dividir en tres triángulos y su suma expresarla como:

$$\sum_{i=1}^{5} \gamma_i = 3\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 3(180°) = 540° \qquad (6)$$

De la misma manera se puede expresar la suma de los ángulos internos (Φ) de los siguientes polígonos de n lados en función de triángulos. Notamos que el escalar por el que se multiplica (4) es siempre menor en dos al número de lados del polígono, así que se expresará de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i = (n-2)\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = (n-2)180°$$

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i = (n-2)180° \qquad (7)$$

Llamándole a (7) como la generalidad de la sumatoria de los ángulos internos de un polígono de n lados, es obvio que al ser dividida la expresión (7) entre el número de lados (n) de un polígono se obtendrá el valor del ángulo interno (Φ). Entonces tenemos:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \phi_i}{n} = \frac{(n-2)}{n}180° = \phi$$

$$\phi = \frac{(n-2)}{n}180° \qquad (3)$$

III. FÓRMULAS DEDUCTIVAS

A) TRIÁNGULO

Al analizar la construcción de un triángulo equilátero se puede observar en la figura 2 que cuando se traza la altura en dos vértices se obtiene la formación de un triángulo rectángulo. Así que al ocupar este triángulo rectángulo se puede obtener una igualdad que relacione el lado del triángulo equilátero (**L₃**) y el radio (**r**) de la circunferencia circunscrita.

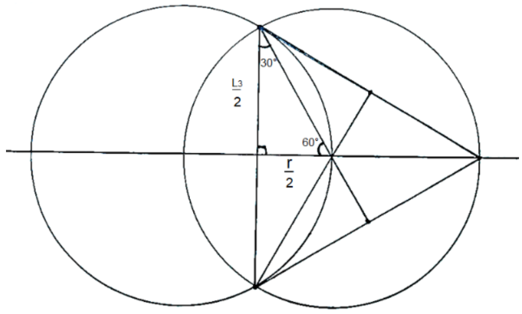

Fig. 2. Triángulo

La fórmula deductiva se puede obtener de dos maneras:

Primera forma:

Debido a la propiedad de rigidez, el triángulo es el único polígono que ha desarrollado una ciencia especial llamada trigonometría, la cual estudia las medidas de los triángulos [2], por dicha razón la primera forma de relacionar **L_3** y **r** es ocupar la función trigonométrica $\tan\frac{\varphi}{2}$.

Si denotamos $\tan\frac{\varphi}{2} = 30°$, entonces:

$$\tan 30° = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{L_3}{2}}$$

$$\tan 30° = \frac{2r}{2L_3} = \frac{r}{L_3}$$

$$r = L_3 \tan 30°$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del triángulo equilátero en función de **r** es:

$$r = \frac{L_3\sqrt{3}}{3} \qquad (8)$$

Y en función de **L_3** es:

$$L_3 = \sqrt{3}r \qquad (8.1)$$

Segunda forma:

La relación de **L_3** y **r** también se puede obtener ocupando el Teorema de Pitágoras.

$$(r)^2 = \left(\frac{L_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{{L_3}^2}{4} + \frac{r^2}{4}$$

$$r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{{L_3}^2}{4} + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4}$$

$$\frac{3r^2}{4} = \frac{{L_3}^2}{4}$$

$$3r^2 = {L_3}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{{L_3}^2}{3}} = \frac{\sqrt{{L_3}^2}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{L_3}{\sqrt{3}} \cdot (1)$$

$$r = \frac{L_3}{\sqrt{3}} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}})$$

$$r = \frac{L_3\sqrt{3}}{3} \qquad (8)$$

B) CUADRADO

En el cuadrado, la relación de **L4** y **r** se puede obtener al ocupar el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por las diagonales de dicho cuadrado, como se muestra ene la figura 3.

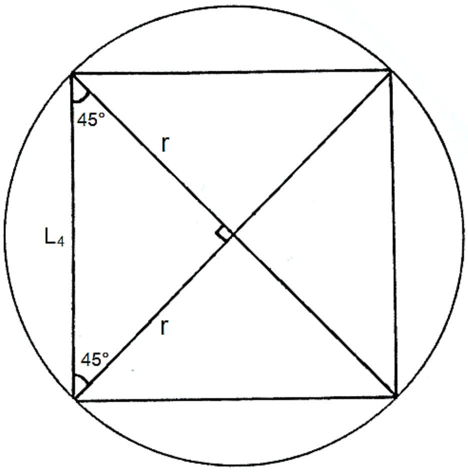

Fig. 3. Cuadrado

Se sabe que la base y la altura del triángulo rectángulo es **r** y su hipotenusa es **L4**, entonces:

$$L_4{}^2 = r^2 + r^2$$
$$L_4{}^2 = 2r^2$$
$$r^2 = \frac{L_4{}^2}{2}$$
$$r = \sqrt{\frac{L_4{}^2}{2}}$$
$$r = \frac{L_4}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, reduciendo, la fórmula deductiva del cuadrado en función de **r** es:

$$r = \frac{L_4\sqrt{2}}{2} \qquad (9)$$

Y en función a **L4** es:

$$L_4 = \sqrt{2}r \qquad (9.1)$$

Por otro lado, si se ocupa la función trigonométrica $\sin \varphi$ también se llega a la expresión (9).

$$\sin \varphi = \sin 45° = \frac{r}{L_4}$$
$$r = L_4 \sin 45°$$
$$r = \frac{L_4\sqrt{2}}{2} \qquad (9)$$

C) PENTÁGONO

Teniendo la construcción del pentágono regular se puede trabajar con el triángulo isósceles formado por el centro y dos vértices contiguos, dicho triángulo isósceles se divide para formar dos triángulos rectángulos iguales, al enfocarse en uno de éstos triángulos se puede obtener una relación, entre el lado (**L5**) del pentágono y el radio (**r**) de la circunferencia que lo contiene, al ocupar la función trigonométrica *sin* δ, como se muestra en la figura 4.

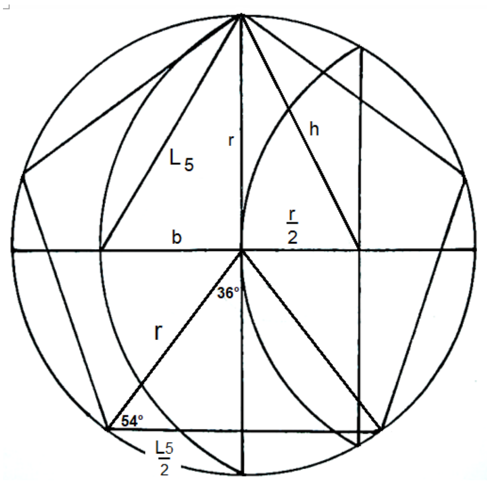

Fig. 4. Pentágono

Si se denota δ = 36°, entonces:

$$\sin 36° = \frac{\frac{L_5}{2}}{r}$$
$$\sin 36° = \frac{L_5}{2r}$$
$$2r = \frac{L_5}{\sin 36°}$$

Por lo tanto reduciendo, la fórmula deductiva en función a **r** del pentágono es:

$$r = \frac{L_5}{2 \sin 36°} \qquad (10)$$

Y en función de **L5** es:

$$L_5 = 2\sin(36°)\, r \qquad (10.1)$$

Además de esta fórmula se puede obtener otra expresión sin ocupar la función trigonométrica sin. Para ello se ocupa el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa L_5 y como cateto mayor **r**. Por ello se averigua primero el valor de **h** para obtener **b**.
Para obtener **h** se ocupa el Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = r^2 + (\frac{r}{2})^2$$
$$h = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}}$$
$$h = \frac{\sqrt{5}r}{2}$$

Se obtiene **b** ahora:

$$b = \frac{\sqrt{5}r}{2} - \frac{r}{2}$$

Con **b** ya se puede obtener la relación buscada:

$$(L_5)^2 = (r)^2 + (\frac{\sqrt{5}r}{2} - \frac{r}{2})^2$$
$$(L_5)^2 = \frac{(5-\sqrt{5})r^2}{2}$$
$$L_5 = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})r^2}{2}}$$

Reduciendo se obtiene otra fórmula deductiva en función a $\mathbf{L_5}$ del pentágono:

$$L_5 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \qquad (10.2)$$

Y en función a **r** es:

$$r = \frac{L_5(5\sqrt{2(5-\sqrt{5})} + \sqrt{10(5-\sqrt{5})})}{20} \qquad (10.3)$$

Como se puede observar (10.3) es más laboriosa por ende se puede ocupar como mejor opción (10) generando el mismo resultado.

D) HEXÁGONO

En el hexágono, la fórmula deductiva se puede obtener al analizar la construcción mostrada; ocupando el triángulo rectángulo y la función trigonométrica $\sin\frac{\varphi}{3}$, como se describe en la figura 5.

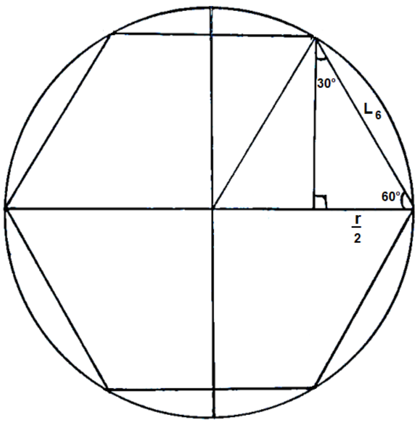

Fig. 5. Hexágono

Si se denota $\sin\frac{\varphi}{3} = 30°$, entonces:

$$\sin 30° = \frac{\frac{r}{2}}{L_6}$$
$$\sin 30° = \frac{r}{2L_6}$$
$$r = 2L_6 \sin 30°$$
$$r = 2L_6\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto reduciendo, la fórmula deductiva en función de **r** del hexágono es:

$$r = L_6 \qquad (11)$$

Y en función de $\mathbf{L_6}$:

$$L_6 = r$$

También se obtiene la fórmula deductiva (11) cuando el hexágono se divide en 6 triángulos equiláteros y se observa que **r** es un lado de ese triángulo y $\mathbf{L_6}$ también.

E) HEPTÁGONO

Si se trabaja en el triángulo rectángulo formado en la construcción del heptágono regular, se puede obtener la relación entre $\mathbf{L_7}$ y **r** que buscamos, descrita en la figura 6.

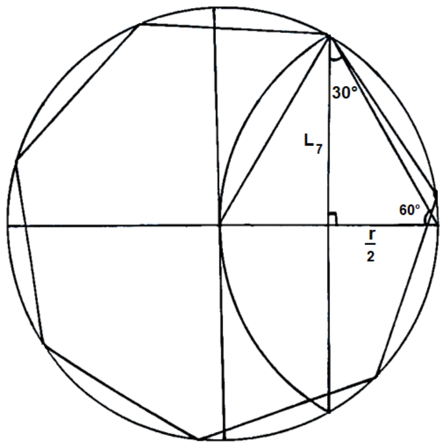

Fig. 6. Heptágono

Al ser ocupada la función trigonométrica tan, donde la altura del triángulo rectángulo es $\mathbf{L_7}$ tenemos:

$$\tan 30° = \frac{\frac{r}{2}}{L_7}$$
$$\tan 30° = \frac{r}{2L_7}$$
$$r = L_7 2\tan 30°$$

Por lo tanto reduciendo, la fórmula deductiva en función de **r** del heptágono es:

$$r = \frac{L_7 2\sqrt{3}}{3} \qquad (12)$$

Y en función de $\mathbf{L_7}$ es:

$$L_7 = \frac{\sqrt{3}r}{2} \qquad (12.1)$$

F) OCTÁGONO

En la circunferencia que contiene a un cuadrado, se puede notar que al dividir los lados del cuadrado a la mitad y trazar una línea, que pase por ellos y toque la circunferencia y el centro, obtenemos 8 triángulos rectángulos como en la figura 7; al trabajar con alguno de ellos podemos obtener la relación entre **L_8 y r** con el Teorema de Pitágoras.

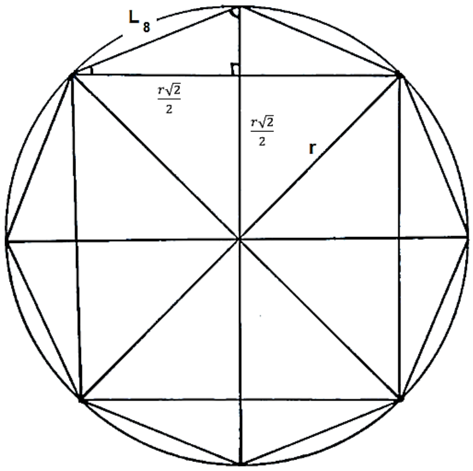

Fig. 7. Octágono

Entonces:

La fórmula deductiva del cuadrado es:

$$r = \frac{L_4\sqrt{2}}{2} \qquad (9)$$

Al escribirla en función de L_4 (9.1) y dividirla entre dos obtenemos:

$$\frac{L_4}{2} = \frac{\sqrt{2}r}{2} \qquad (13)$$

Lo que representa la base del triángulo rectángulo a manejar, para hallar su altura de dicho triángulo simplemente se le resta (13) a **r**.

Al ocupar el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$(L_8)^2 = (\frac{r\sqrt{2}}{2})^2 + (r - \frac{r\sqrt{2}}{2})^2$$
$$(L_8)^2 = \frac{r^2}{2} + r^2 - \sqrt{2}r^2 + \frac{r^2}{2}$$
$$(L_8)^2 = 2r^2 - \sqrt{2}r^2$$
$$L_8 = \sqrt{2r^2 - \sqrt{2}r^2}$$
$$L_8 = \sqrt{r^2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$L_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Escribiendo la fórmula deductiva del octágono, en función de **r,** tenemos:

$$r = \frac{L_8}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \qquad (14)$$

Y en función de **L_8** es:

$$L_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ r \qquad (14.1)$$

G) ENEÁGONO

Para obtener la fórmula deductiva del eneágono se puede analizar el triángulo rectángulo que se forma al dividir el triángulo isósceles formado por dos vértices consecutivos y el centro del polígono, descrito en la figura 8.

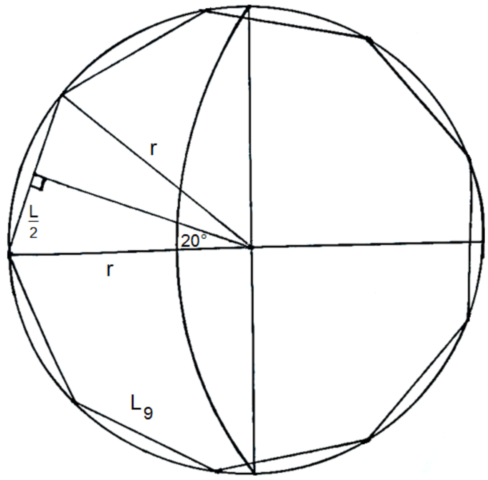

Fig. 8. Eneágono

Se puede ocupar la función trigonométrica $\sin\delta$.
Si se denota $\delta = 20°$entonces:

$$\sin 20° = \frac{\frac{L_9}{2}}{r}$$
$$\sin 20° = \frac{L_9}{2r}$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del eneágono en función de **r** es:

$$r = \frac{L_9}{2\sin 20°} \qquad (15)$$

Y en función de L_9 es:

$$L_9 = 2\sin 20°\, r \qquad (15.1)$$

H) DECÁGONO

Al analizar la construcción del decágono regular de la figura 9 se nota la formación de un triángulo rectángulo de hipotenusa de tamaño **L_5** (se puede ver en la sección del pentágono), de cateto mayor **r** y cateto menor **L_{10}**. En este triángulo se puede obtener la relación deseada. Ocupando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$${L_5}^2 = r^2 + {L_{10}}^2$$

Donde **L_5** es la fórmula (10.2), por lo tanto:

$$(r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}})^2 = r^2 + {L_{10}}^2$$

$$\frac{(5-\sqrt{5})r^2}{2} - r^2 = {L_{10}}^2$$
$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}r^2 - r^2 = {L_{10}}^2$$
$$r^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} - 1\right) = {L_{10}}^2$$
$$r^2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = {L_{10}}^2$$
$$L_{10} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})r^2}{2}}$$

Reduciendo se obtiene la fórmula deductiva del decágono en función de $\mathbf{L_{10}}$:

$$L_{10} = \frac{r\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{2} \qquad (16)$$

Escribiendo en función de **r** tenemos:

$$r = \frac{L_{10}(3+\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \qquad (16.1)$$

Se puede obtener otra fórmula deductiva del decágono al trabajar con el triángulo isósceles formado por el centro y dos vértices contiguos, dicho triángulo isósceles se divide para formar dos triángulos rectángulos iguales, al enfocarse en uno de estos triángulos se puede obtener una relación, entre el lado ($\mathbf{L_{10}}$) del decágono y el radio (**r**) de la circunferencia que lo contiene, al ocupar la función trigonométrica *sin* δ.

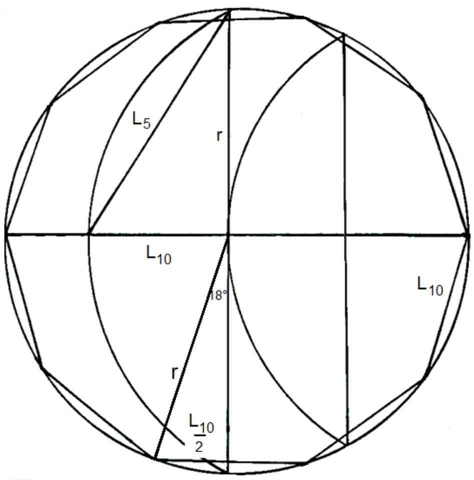

fig. 9. Decágono.

Si se denota δ = 18°, entonces:

$$\sin 18° = \frac{\frac{L_{10}}{2}}{r}$$
$$\sin 18° = \frac{L_{10}}{2r}$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del decágono en función de $\mathbf{L_{10}}$ es:

$$L_{10} = 2\sin 18°\, r \qquad (16.2)$$

Y en función de **r** es:

$$r = \frac{L_{10}}{2\sin 18°} \qquad (16.3)$$

I) ENDECÁGONO

Para obtener la fórmula deductiva del endecágono se puede ocupar la función trigonométrica $\sin\delta$ en el triángulo rectángulo formado en la construcción de la figura 10.

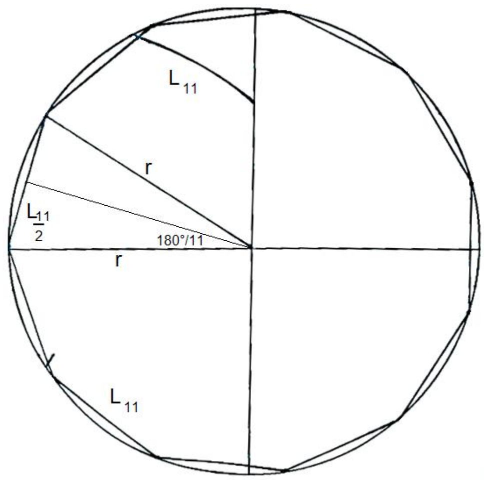

Fig. 10 endecágono

Si se denota $\sin\delta = \frac{180°}{11}$, entonces:

$$\sin\frac{180°}{11} = \frac{\frac{L_{11}}{2}}{r}$$

Reduciendo se obtiene la fórmula deductiva del endecágono en función de **r**:

$$r = \frac{L_{11}}{2\sin\frac{180°}{11}} \qquad (17)$$

Escribiendo en función de $\mathbf{L_{10}}$ tenemos:

$$L_{11} = 2\sin\frac{180°}{11}r \qquad (17.1)$$

J) DODECÁGONO

Se puede obtener dos fórmulas deductivas para el dodecágono, como en la figura 11.

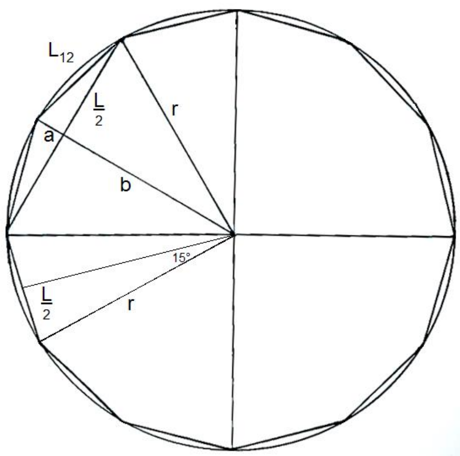

Fig. 11 Dodecágono

La primera de ellas se trabaja en el triángulo rectángulo que se forma al dividir el triángulo isósceles formado por dos vértices consecutivos y el centro del polígono. Se puede ocupar la función trigonométrica $\sin\delta$.
Si se denota $\delta = 15°$entonces:

$$\sin 15° = \frac{\frac{L_{12}}{2}}{r}$$

$$\sin 15° = \frac{L_{12}}{2r}$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del dodecágono en función a **L12** es:

$$L_{12} = 2r\sin 15° \quad (18)$$

Y en función de **r**:

$$r = \frac{L_{12}}{2\sin 15°} \qquad (18.1)$$

La segunda fórmula deductiva se obtiene de una forma más elaborada, se ocupa el Teorema de Pitágoras en triángulo rectángulo formado por hipotenusa **L12**, cateto mayor **r/2** y cateto menor **a**. Para obtener el valor de **a** se debe obtener primero el valor de **b** en el triángulo rectángulo contiguo.

Se calcula **b** con el Teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{r^2 - (\frac{r}{2})^2}$$

$$b = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$$

Teniendo este valor se sabe el valor de **a**.

$$a = r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$$

Se obtiene la relación buscada ocupando de nuevo el Teorema de Pitágoras en el triángulo escaleno donde **a** es el cateto menor. Entonces:

$${L_{12}}^2 = (\frac{r}{2})^2 + (a)^2$$

$${L_{12}}^2 = (\frac{r}{2})^2 + (r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}})^2$$

$$L_{12} = \sqrt{(\frac{r}{2})^2 + (r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}})^2}$$

$$L_{12} = \sqrt{\frac{r^2}{4} + (r - \frac{\sqrt{3}r}{2})^2}$$

$$L_{12} = \sqrt{(2-\sqrt{3})r^2}$$

$$L_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,\sqrt{r^2}$$

Por lo tanto, la otra fórmula deductiva del dodecágono en función a **L12** es:

$$L_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,r \qquad (18.3)$$

Y en función de **r**:

$$r = L_{12}\sqrt{\sqrt{3}+2} \qquad (18.4)$$

IV. ¿CÓMO OCUPAR LAS FÓRMULAS DEDUCTIVAS?

Para el trazo de los diez primeros polígonos regulares manejaremos de la misma manera las fórmulas deductivas presentadas. Dichas fórmulas poseen la característica de relacionar únicamente el tamaño del lado (L) del polígono con el tamaño del radio (r) de la circunferencia circunscrita. Por tal motivo, podemos tener tres casos:

Caso 1: Si conocemos el tamaño del radio (r) de la circunferencia circunscrita entonces sustituiremos dicho valor en la fórmula para obtener el tamaño del lado (L) del polígono buscado. Con el compás, abierto al tamaño del lado (L), dividiremos la circunferencia de radio (r) tantas veces como sea posible. Uniremos las marcas de las divisiones de la circunferencia y obtendremos dicho polígono.

Caso 2: Si conocemos el tamaño del lado (L) del polígono buscado entonces sustituiremos dicho valor en la fórmula para obtener el radio (r) de la circunferencia circunscrita. Con el compás, abierto al tamaño del radio (r), trazaremos la circunferencia; después de nuevo con el compás, abierto al tamaño del lado (L), dividiremos la circunferencia de radio (r) tantas veces como sea posible. Uniremos las marcas de las divisiones de la circunferencia y obtendremos dicho polígono.

Caso 3: Si no conocemos el tamaño del radio (r) de la circunferencia circunscrita ni el tamaño del lado (L) del polígono buscado entonces simplemente designaremos un valor (de acuerdo con nuestra conveniencia) para (r) o (L) y lo sustituiremos en la fórmula deductiva.

Después se realizará las mismas instrucciones de trazo del Caso 1 o Caso 2.

V. CONCLUSIONES

El problema de la construcción de los polígonos regulares tiene relación con el problema de la división de la circunferencia en partes iguales; y se puede circunscribir a la circunferencia tantos polígonos regulares como se puede inscribir [4].

Las fórmulas deductivas son una ayuda para el trazo de los polígonos regulares en una circunferencia circunscrita.

En estas líneas se expresan varias de ellas y en algunos casos más de una para el mismo polígono.

En el método tradicional de trazo, por una secuencia de pasos, no todo los polígonos dibujados son exactos; lo mismo ocurre para algunas fórmulas deductivas al ocupar las herramienta (compás y regla) y ejecutar su dinámica.

Cabe señalar que estas fórmulas son una alternativa para la persona y sus necesidades al momento de trazar un polígono regular.

REFERENCIAS

[1] Barnett Rich, P:*Plane Geometry*. McGraw-Hill. (N.Y., 1967).

[2] Cuevas, J. N.: *Trigonometría* Vol. 9. LIMUSA (México, 1980)

[3] Wentworth, J. / Smith D.. *Geometry*. Ginn and Company. (Boston, 1972)

[4] Bruño, G. M.. Elementos de Geometría. Bouret. Rue Visconti, (París,1909).

[5] Barnett, R., Thomas, C. Geometry. Schaum´s.. McGraw-Hill. (N.Y.,2017)